Correction du TD 3

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Pour savoir si cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on détermine son polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -5 & -2 \\ -2 & 7-\lambda & -8 \\ -5 & 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (13-\lambda)(\lambda^2 - 14\lambda + 81) + 2(5\lambda - 27) - 5(54 - 2\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 \times 9 - 3\lambda \times 9^2 + 9^3 = -(\lambda - 9)^3$$

Ainsi, on a : $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{9\}$. Pour conclure, on étudie le sous-espace propre E_9 associé à la valeur propre 9 en résolvant l'équation matricielle : $(A - 9I)X = 0$. On a :

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y - 16z - 5y - 2z = 0 \\ x = -y - 4z \\ 5y + 20z + 4y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = -2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Par conséquent, on a : $E_9 = Vect\{u_1\}$ avec $u_1 = (2,2,-1)$ donc E_2 étant de dimension 1, cette matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Une matrice est toujours trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
3) Comme $Sp_{\mathbb{C}}(A) = Sp_{\mathbb{R}}(A)$, le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}$ de sorte que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'elle est aussi décomposable en blocs de Jordan dans ce même espace.
4)

Trigonalisation

Pour trouver une base dans laquelle A s'exprime sous la forme d'une matrice triangulaire supérieure, nous commençons par calculer les puissances de M où $M = A - 9I$. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 36 & -18 & 36 \\ 36 & -18 & 36 \\ -18 & 9 & -18 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = 0 \ \ (théorème\ de\ Cayley - Hamilton)$$

Comme $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$, le sous-espace caractéristique N_9 associé à la valeur propre 9 est $\mathbb{R}^3$. Pour obtenir une base adéquate, on choisit un premier vecteur dans E_9, un second dans $E_9' \backslash E_9$ où $E_9' = \mathrm{Ker}(M^2)$ et le dernier dans $N_9 \backslash E_9'$.

On résout l'équation matricielle suivante :

$$M^2X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 36 & -18 & 36 \\ 36 & -18 & 36 \\ -18 & 9 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 2z \\ x \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ainsi, on a : $E_9' = Vect\{u_2, u_3\}$ avec $u_2 = (1,2,0)$ et $u_3 = (0,2,1)$. L'endomorphisme représenté par A dans la base canonique est représenté par la matrice triangulaire supérieure T suivante dans la base (u_1, u_2, e_3) :

$$T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque T présente les valeurs propres de A sur sa diagonale principale, la trace de T est égale à celle de A et il faut penser à vérifier que (u_1, u_2, e_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$ en calculant le déterminant associé avant de se lancer dans les calculs.

Décomposition de Jordan

Pour la décomposition de Jordan, les colonnes sont très particulières donc on ne peut plus se contenter de compléter notre famille par un vecteur de la base canonique. On choisira un vecteur dans $N_9 \backslash E_9'$ et on construira les vecteurs suivants.

D'après l'étude réalisée ci-avant, on sait que $\dim E_9 = 1$ donc la décomposition de Jordan ne comportera qu'un seul bloc et comme $\dim N_9 = 3$, ce bloc est (forcément) de dimension 3. On en déduit le polynôme minimal π_A de A : $\pi_A(\lambda) = (\lambda - 9I)^3$. On peut aussi sans persuader à l'aide de $M^2 \neq 0$.

Pour obtenir une base adéquate, on choisit le troisième vecteur v_3 dans $N_9 \backslash E_9'$; par exemple, e_1 de la base canonique et ensuite, on construit les vecteurs suivants :

$$v_2 = Mv_3 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \ et \ v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ -18 \end{pmatrix} \in E_9$$

Finalement, on peut vérifier que l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique est représenté par la matrice J suivante dans la base (v_1, v_2, v_3) :

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 36 & 4 & 1 \\ 36 & -2 & 0 \\ -18 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Pour savoir si cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on détermine son polynôme caractéristique :

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ \lambda & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + \lambda(2-\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \chi_B(\lambda) = (2-\lambda)(4 - 5\lambda + \lambda^2 + \lambda) = -(\lambda - 2)^3$$

Ainsi, on a : $Sp_{\mathbb{C}}(B) = \{2\}$. Pour conclure, on étudie le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 en résolvant l'équation matricielle : $(B - 2I)X = 0$. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Par conséquent, on a : $E_2 = Vect\{u_1\}$ avec $u_1 = (0,1,1)$ donc E_2 étant de dimension 1, cette matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Une matrice est toujours trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
3) Comme $Sp_{\mathbb{C}}(B) = Sp_{\mathbb{R}}(B)$, le polynôme caractéristique de B est scindé dans $\mathbb{R}$ de sorte que B est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'elle est aussi décomposable en blocs de Jordan dans ce même espace.

4)

Trigonalisation

Pour trouver une base dans laquelle B s'exprime sous la forme d'une matrice triangulaire supérieure, nous commençons par calculer les puissances de M où $M = B - 2I$. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = 0 \ \ (\textit{théorème de Cayley} - \textit{Hamilton})$$

Comme $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$, le sous-espace caractéristique N_2 associé à la valeur propre 2 est $\mathbb{R}^3$. Pour obtenir une base adéquate, on choisit un premier vecteur dans E_2, un second dans $E_2' \backslash E_2$ où $E_2' = \mathrm{Ker}(M^2)$ et le dernier dans $N_2 \backslash E_2'$.

On résout l'équation matricielle suivante :

$$M^2 X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = x + y \end{cases}$$

Ainsi, on a : $E_2' = Vect\{u_2, u_3\}$ avec $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (0,1,1)$. L'endomorphisme représenté par B dans la base canonique est représenté par la matrice triangulaire supérieure T suivante dans la base (u_1, u_2, e_3) :

$$T = P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Décomposition de Jordan

D'après l'étude réalisée ci-avant, on sait que $\dim E_2 = 1$ donc la décomposition de Jordan ne comportera qu'un seul bloc et comme $\dim N_2 = 3$, ce bloc est (forcément) de dimension 3. On en déduit le polynôme minimal π_B de B : $\pi_B(\lambda) = (\lambda - 2I)^3$. On peut aussi sans persuader à l'aide de $M^2 \neq 0$.

Pour obtenir une base adéquate, on choisit le troisième vecteur v_3 dans $N_2 \backslash E_2'$; par exemple, e_1 de la base canonique et ensuite, on construit les vecteurs suivants :

$$v_2 = M v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } v_1 = M v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_2$$

Finalement, on peut vérifier que l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique est représenté par la matrice J suivante dans la base (v_1, v_2, v_3) :

$$J = P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Pour savoir si cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on détermine son polynôme caractéristique :

$$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(\lambda-3)(\lambda+1)+4]$$

$$\Leftrightarrow \chi_C(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (1-\lambda)^3$$

Ainsi, on a : $Sp_{\mathbb{C}}(C) = \{1\}$. Pour conclure, on étudie le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 en résolvant l'équation matricielle : $(C - I)X = 0$. On a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = x + y \end{cases}$$

Par conséquent, on a : $E_1 = Vect\{u_1; u_2\}$ avec $u_1 = (1,0,1)$ et $u_2 = (0,1,1)$ donc E_1 étant de dimension 2, cette matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Une matrice est toujours trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
3) Comme $Sp_{\mathbb{C}}(C) = Sp_{\mathbb{R}}(C)$, le polynôme caractéristique de C est scindé dans $\mathbb{R}$ de sorte que C est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'elle est aussi décomposable en blocs de Jordan dans ce même espace.
4)

Trigonalisation

Pour trouver une base dans laquelle C s'exprime sous la forme d'une matrice triangulaire supérieure, il suffit de compléter la famille $\{u_1, u_2\}$ par un vecteur de la base canonique.

Ainsi, l'endomorphisme représenté par C dans la base canonique est représenté par la matrice triangulaire supérieure T suivante dans la base (u_1, u_2, e_3) :

$$T = P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Décomposition de Jordan

D'après l'étude réalisée ci-avant, on sait que $\dim E_1 = 2$ donc la décomposition de Jordan comportera deux blocs. Comme l'espace est $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le bloc le plus grand est forcément de dimension deux et le polynôme minimal de C est : $\pi_C(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Le polynôme minimal étant un polynôme annulateur de C, on a : $(C - I)^2 = 0$ donc le sous-espace caractéristique N_1 associé à la valeur propre 1 est $\mathbb{R}^3$.

Pour obtenir une base adéquate, on choisit le dernier vecteur v_3 dans E_1 ; par exemple, u_1 de E_1, puis on choisit le deuxième vecteur v_2 dans $N_1 \backslash E_1$; par exemple, e_1 de la base canonique et ensuite, on construit le premier vecteur suivant :

$$v_1 = (C - I)v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, on peut vérifier que l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique est représenté par la matrice J suivante dans la base (v_1, v_2, v_3) :

$$J = P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

1) Pour savoir si cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on détermine son polynôme caractéristique :

$$\chi_E(\lambda)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & -3\\ 4 & 10-\lambda & -12\\ 3 & 6 & -7-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & 3(2-\lambda)\\ 4 & 10-\lambda & 0\\ 3 & 6 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda-6 & -16 & 0\\ 4 & 10-\lambda & 0\\ 3 & 6 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \chi_E(\lambda)=(2-\lambda)[(\lambda-10)(\lambda+6)+64]=(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)=(2-\lambda)^3$$

Ainsi, on a : $Sp_{\mathbb{C}}(C)=\{2\}$. Pour conclure, on étudie le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 en résolvant l'équation matricielle : $(E-2I)X=0$. On a :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 8 & -12\\ 3 & 6 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2y+3z\\ y\in\mathbb{R}\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Par conséquent, on a : $E_2=Vect\{u_1;u_2\}$ avec $u_1=(2,-1,0)$ et $u_2=(3,0,1)$ donc E_2 étant de dimension 2, cette matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Une matrice est toujours trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
3) Comme $Sp_{\mathbb{C}}(E)=Sp_{\mathbb{R}}(E)$, le polynôme caractéristique de E est scindé dans $\mathbb{R}$ de sorte que E est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'elle est aussi décomposable en blocs de Jordan dans ce même espace.
4)

Trigonalisation

Pour trouver une base dans laquelle E s'exprime sous la forme d'une matrice triangulaire supérieure, il suffit de compléter la famille $\{u_1,u_2\}$ par un vecteur de la base canonique.

Ainsi, l'endomorphisme représenté par E dans la base canonique est représenté par la matrice triangulaire supérieure T suivante dans la base (u_1,u_2,e_3) :

$$T=P^{-1}EP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 12\\ 0 & 2 & -9\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\text{ où } P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Décomposition de Jordan

D'après l'étude réalisée ci-avant, on sait que $\dim E_2=2$ donc la décomposition de Jordan comportera deux blocs. Comme l'espace est $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le bloc le plus grand est forcément de dimension deux et le polynôme minimal de E est : $\pi_E(\lambda)=(\lambda-2)^2$. Le polynôme minimal étant un polynôme annulateur de E, on a : $(E-2I)^2=0$ donc le sous-espace caractéristique N_2 associé à la valeur propre 2 est $\mathbb{R}^3$.

Pour obtenir une base adéquate, on choisit le dernier vecteur v_3 dans E_2 ; par exemple, u_1 de E_1, puis on choisit le deuxième vecteur v_2 dans $N_2\backslash E_2$; par exemple, e_1 de la base canonique et ensuite, on construit le premier vecteur suivant :

$$v_1=(E-2I)v_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 8 & -12\\ 3 & 6 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$$

Finalement, on peut vérifier que l'endomorphisme représenté par E dans la base canonique est représenté par la matrice J suivante dans la base (v_1,v_2,v_3) :

$$J=P^{-1}EP=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\text{ avec } P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 6 & -9\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Pour savoir si cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on détermine son polynôme caractéristique :

$$\chi_F(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & 1-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \chi_F(\lambda) = (\lambda-1)[(3-\lambda)(\lambda-1)-1] = (\lambda-1)(-\lambda^2+4\lambda-4) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

Ainsi, on a : $Sp_{\mathbb{C}}(F) = \{1; 2\}$. Pour conclure, on étudie le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 en résolvant l'équation matricielle : $(F-2I)X = 0$. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Par conséquent, on a : $E_2 = Vect\{u_1\}$ avec $u_1 = (1,1,0)$ donc E_2 étant de dimension 1, cette matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Une matrice est toujours trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

3) Comme $Sp_{\mathbb{C}}(F) = Sp_{\mathbb{R}}(F)$, le polynôme caractéristique de F est scindé dans $\mathbb{R}$ de sorte que F est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'elle est aussi décomposable en blocs de Jordan dans ce même espace.

4)

Trigonalisation

Il nous reste à étudier le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 ; pour cela, on résout l'équation matricielle suivante :

$$(F-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x - x - z + z = 0 \\ y = x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On a donc : $E_1 = Vect\{u_2\}$ où $u_2 = (0; 1; 1)$ donc pour trouver une base dans laquelle F s'exprime sous la forme d'une matrice triangulaire supérieure, il suffit de compléter la famille $\{u_1, u_2\}$ par un vecteur de la base canonique.

Ainsi, l'endomorphisme représenté par F dans la base canonique est représenté par la matrice triangulaire supérieure T suivante dans la base (u_1, u_2, e_3) :

$$T = P^{-1}FP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Décomposition de Jordan

D'après l'étude réalisée ci-avant, on sait que $\dim E_1 = 1$ et que $\dim E_2 = 1$ donc la décomposition de Jordan comportera un bloc associé à la valeur propre 1 et un bloc associé à la valeur propre 2. Comme l'espace est $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le bloc le plus grand est forcément de dimension deux donc le polynôme minimal de F est : $\pi_F(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$. Pour poursuivre l'étude, nous devons connaître les sous-espace caractéristique N_2 de F associé à la valeur propre 2 ; pour cela, en posant : $M = F - 2I$, on résout l'équation matricielle suivante :

$$M^2X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On a donc : $N_2 = Vect\{u_3, u_4\}$ avec $u_3 = (1,1,0)$ et $u_4 = (0,0,1)$.

Pour obtenir une base adéquate, on choisit le dernier vecteur v_3 dans E_1 ; par exemple, u_2 de E_1, puis on choisit le deuxième vecteur v_2 dans $N_2 \backslash E_2$; par exemple, u_4 de N_2 et ensuite, on construit le premier vecteur suivant :

$$v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, on peut vérifier que l'endomorphisme représenté par F dans la base canonique est représenté par la matrice J suivante dans la base (v_1, v_2, v_3) :

$$J = P^{-1}FP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Pour savoir si cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on détermine son polynôme caractéristique :

$$\chi_G(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \chi_G(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

Ainsi, on a : $Sp_{\mathbb{C}}(G) = \{1; 2\}$. Pour conclure, on étudie le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 en résolvant l'équation matricielle : $MX = 0$ où $M = G - I$. On a :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ y + z + y - z = 0 \\ x = y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Par conséquent, on a : $E_1 = Vect\{u_1\}$ avec $u_1 = (1,0,1)$ donc E_1 étant de dimension 1, cette matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Une matrice est toujours trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
3) Comme $Sp_{\mathbb{C}}(G) = Sp_{\mathbb{R}}(G)$, le polynôme caractéristique de G est scindé dans $\mathbb{R}$ de sorte que G est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'elle est aussi décomposable en blocs de Jordan dans ce même espace.
4)

Trigonalisation

Il nous reste à étudier le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 ; pour cela, on résout l'équation matricielle suivante :

$$(G - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ z = x \\ y = x \end{cases}$$

On a donc : $E_2 = Vect\{u_2\}$ où $u_2 = (1;1;1)$ donc pour trouver une base dans laquelle G s'exprime sous la forme d'une matrice triangulaire supérieure, il suffit de compléter la famille $\{u_1, u_2\}$ par un vecteur de la base canonique.

Ainsi, l'endomorphisme représenté par G dans la base canonique est représenté par la matrice triangulaire supérieure T suivante dans la base (u_1, u_2, e_3) :

$$T = P^{-1}FP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Décomposition de Jordan

D'après l'étude réalisée ci-avant, on sait que $\dim E_1 = 1$ et que $\dim E_2 = 1$ donc la décomposition de Jordan comportera un bloc associé à la valeur propre 1 et un bloc associé à la valeur propre 2. Pour poursuivre l'étude, nous devons connaître les sous-espace caractéristique N_1 de G associé à la valeur propre 1 ; pour cela, en posant, on résout l'équation matricielle suivante :

$$M^2X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = x + y \end{cases}$$

(Comme précédemment, l'espace est $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc le bloc le plus grand est forcément de dimension deux donc le polynôme minimal de G est : $\pi_G(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$).

On a donc : $N_1 = Vect\{u_3, u_4\}$ avec $u_3 = (1,0,1)$ et $u_4 = (0,1,1)$.

Pour obtenir une base adéquate, on choisit le dernier vecteur v_3 dans E_2 ; par exemple, u_2 de E_2, puis on choisit le deuxième vecteur v_2 dans $N_1 \backslash E_1$; par exemple, u_4 de N_1 et ensuite, on construit le premier vecteur suivant :

$$v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_1$$

Finalement, on peut vérifier que l'endomorphisme représenté par G dans la base canonique est représenté par la matrice J suivante dans la base (v_1, v_2, v_3) :

$$J = P^{-1}GP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant : $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, on a : $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + 2y_n - 2z_n \\ -1x_n + 0y_n + 1z_n \\ 1x_n + 1y_n + 0z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$.
2) D'après l'exercice 1 , la matrice A est trigonalisable et la décomposition de Jordan de cette matrice est :

$$A = PJP^{-1} \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que : $A^n = PJ^nP^{-1}$. On doit donc chercher la puissance n de la matrice J ; pour cela, on la décompose en : $I + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente d'indice 2. Comme les matrices I et N commutent, on utilise la formule du binôme de Newton de sorte que :

$$J^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} = I + nN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2n+1 & 1 \\ -1 & -n & 0 \\ 1 & n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}$$

4) On montre une récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$ que : $X_n = A^n X_0$ donc on peut en déduire l'expression explicite de X_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} (2n+1)x_0 + 2ny_0 - 2nz_0 \\ -nx_0 + (1-n)y_0 + nz_0 \\ nx_0 + ny_0 + (1-n)z_0 \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_n = (2n+1)x_0 + 2ny_0 - 2nz_0 \\ y_n = -nx_0 + (1-n)y_0 + nz_0 \\ z_n = nx_0 + ny_0 + (1-n)z_0 \end{cases}$$